第44講　$A=BQ+R$ について

44　次の各問いに答えよ．

(1)　$\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2$ を x^3+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　m, n を正の整数とするとき，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ．また，x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．また，$(x-2)^3$ で割ったときの余りを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　$A=BQ+R$ について

44　$\{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{10}$ を $(x+2)^{12}$ で割ったときの余りを求めよ.

【選択肢】

㋐　$(x+2)^9$　　㋑　$(x+2)^{10}$　　㋒　$(x+2)^{11}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第44講　$A=BQ+R$ について

44　次の各問いに答えよ．

(1)　$\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2$ を x^3+1 で割ったときの余りを求めよ．

(2)　m, n を正の整数とするとき，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ．また，x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを求めよ．

(3)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ．

(4)　$f(x)=x^n$（n は自然数）とする．$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りを求めよ．また，$(x-2)^3$ で割ったときの余りを求めよ．

【答】 (1) $-3x^2+3x+6$　(2) 順に 2, $\begin{cases} 2 & (n=3k \text{ のとき}) \\ x+1 & (n=3k+1 \text{ のとき}) \\ -x & (n=3k+2 \text{ のとき}) \end{cases}$（$k$ は整数）

(3) $(3^n-2^n)x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$

(4) 順に $n\cdot 2^{n-1}x-(n-1)2^n$，$n(n-1)2^{n-3}x^2-n(n-2)2^{n-1}x+(n-1)(n-2)2^{n-1}$

【解答】

(1)　与式について

$$\begin{aligned}(x+1)(x-2)(x^2-x+2)&=(x+1)(x-2)\{(x^2-x+1)+1\}\\&=(x-2)\{(x^3+1)+(x+1)\}\\&=(x^3+1)(x-2)+(x-2)(x+1)\\&=(x^3+1)(x-2)+x^2-x-2\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}&\{(x+1)(x-2)(x^2-x+2)\}^2\\&=(x^3+1)^2(x-2)^2+2(x-2)^2(x+1)(x^3+1)+(x^2-x-2)^2\\&=(x^3+1)\{(x^3+1)(x-2)^2+2(x-2)^2(x+1)+(x-2)\}-3x^2+3x+6\end{aligned}$$

よって与式を x^3+1 で割ったときの余りは

$$\boldsymbol{-3x^2+3x+6}$$

(2)　与式は

$$\begin{aligned}x^{3m}+1&=x^{3m}-1+2\\&=(x^3-1)(x^{3m-3}+x^{3m-6}+\cdots\cdots+x^3+1)+2\end{aligned}$$

と変形できるので，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りは **2**

以下，x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの余りを考える．

(I)　$n=3m$ のとき，$x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの余りは 2 より，整式 $Q(x)$ を用いて $x^{3m}+1=(x^3-1)Q(x)+2$ と表せ，$x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$ より

$$x^{3m}+1=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+2$$

よって余りは 2

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅱ)　$n=3m+1$ のとき，(Ⅰ)を利用すると

$$\begin{aligned}x^{3m+1}+1&=x(x^{3m}+1)-x+1\\&=x\{(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+2\}-x+1\\&=(x^2+x+1)x(x-1)Q(x)+x+1\end{aligned}$$

よって余りは $x+1$（これは $n=1$ つまり $m=0$ のときにも成り立つ）

(Ⅲ)　$n=3m+2$ のとき

$$\begin{aligned}x^{3m+2}+1&=x^2(x^{3m}+1)-x^2+1\\&=x^2\{(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+2\}-x^2+1\\&=(x^2+x+1)x^2(x-1)Q(x)+x^2+1\\&=(x^2+x+1)x^2(x-1)Q(x)+x^2+x+1-x\\&=(x^2+x+1)\{x^2(x-1)Q(x)+1\}-x\end{aligned}$$

よって余りは $-x$（これは $n=2$ つまり $m=0$ のときにも成り立つ）

以上より，**k を整数**として求める余りは

$$\begin{cases}\mathbf{2} & (\boldsymbol{n=3k}\ \text{のとき})\\ \boldsymbol{x+1} & (\boldsymbol{n=3k+1}\ \text{のとき})\\ \boldsymbol{-x} & (\boldsymbol{n=3k+2}\ \text{のとき})\end{cases}$$

(3)　$f(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とする．$(x-2)(x-3)$ は 2 次式であるから，余りは 1 次以下となるので，定数 a，b を用いて

$f(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b$ と表せる．

このとき，$f(2)=2^n=2a+b$，$f(3)=3^n=3a+b$ より $a=3^n-2^n$，$b=3\cdot2^n-2\cdot3^n$ となるので，求める余りは $\boldsymbol{(3^n-2^n)x+3\cdot2^n-2\cdot3^n}$

(4)　二項展開を用いると

$$\begin{aligned}f(x)&=x^n=\{(x-2)+2\}^n\\&={}_n\mathrm{C}_n(x-2)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-2)^{n-1}\cdot2+{}_n\mathrm{C}_{n-2}(x-2)^{n-2}\cdot2^2+\\&\quad\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_3(x-2)^3\cdot2^{n-3}+{}_n\mathrm{C}_2(x-2)^2\cdot2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1(x-2)\cdot2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 2^n\end{aligned}$$

が成り立つ．

$n\geqq2$ のとき

$${}_n\mathrm{C}_n(x-2)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-2)^{n-1}\cdot2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_3(x-2)^3\cdot2^{n-3}+{}_n\mathrm{C}_2(x-2)^2\cdot2^{n-2}$$

の部分は $(x-2)^2$ で割り切れるので，$f(x)$ を $(x-2)^2$ で割ったときの余りは

$${}_n\mathrm{C}_1(x-2)\cdot2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 2^n=\boldsymbol{n\cdot2^{n-1}x-(n-1)2^n}$$

（これは $n=1$ のときにも成り立つ）

$n\geqq3$ のとき

$${}_n\mathrm{C}_n(x-2)^n+{}_n\mathrm{C}_{n-1}(x-2)^{n-1}\cdot2+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_3(x-2)^3\cdot2^{n-3}$$

の部分は $(x-2)^3$ で割り切れるので，$f(x)$ を $(x-2)^3$ で割ったときの余りは

$$\begin{aligned}&{}_n\mathrm{C}_2(x-2)^2\cdot2^{n-2}+{}_n\mathrm{C}_1(x-2)\cdot2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_0 2^n\\&=\boldsymbol{n(n-1)2^{n-3}x^2-n(n-2)2^{n-1}x+(n-1)(n-2)2^{n-1}}\end{aligned}$$

（これは $n=1$，2 のときにも成り立つ）

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 44 講　$A = BQ + R$ について

44　$\{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{10}$ を $(x+2)^{12}$ で割ったときの余りを求めよ.

【選択肢】

㋐　$(x+2)^9$　㋑　$(x+2)^{10}$　㋒　$(x+2)^{11}$

【答】　㋑

【解答】

$$\begin{aligned}\{(x+1)(x+2)(x+3)\}^{10} &= (x+2)^{10}\{(x+1)(x+3)\}^{10} \\ &= (x+2)^{10}\{(x+2)^2-1\}^{10} \\ &= (x+2)^{10}\{(x+2)^{20}+(-1)_{10}\mathrm{C}_1(x+2)^{18}+(-1)^2{}_{10}\mathrm{C}_2(x+2)^{16}+ \\ &\qquad \cdots\cdots+(-1)^8{}_{10}\mathrm{C}_8(x+2)^4+(-1)^9{}_{10}\mathrm{C}_9(x+2)^2+(-1)^{10}\} \\ &= (x+2)^{30}+(-1)_{10}\mathrm{C}_1(x+2)^{28}+(-1)^2{}_{10}\mathrm{C}_2(x+2)^{26}+ \\ &\qquad \cdots\cdots+(-1)^8{}_{10}\mathrm{C}_8(x+2)^{14}+(-1)^9{}_{10}\mathrm{C}_9(x+2)^{12}+(-1)^{10}(x+2)^{10}\end{aligned}$$

より，求める余りは

$$(-1)^{10}(x+2)^{10} = \boldsymbol{(x+2)^{10}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。